基于学生能力培养的课程考核评价设计

厦门大学数学科学学院 杜妮

2023.12.17

目 录

CONTENTS

课程考核设计中常见的问题

评价目标单一：

侧重知识目标，缺乏面向能力及素养方面的评价

考核模式单一：

只重视终结性考核，忽略过程性评价

评价主体单一：

以老师作为主体，缺乏学生的参与

相关文件精神

中华人民共和国教育部
Ministry of Education of the People's Republic of China

前位置：首页 > 公开

中共中央 国务院印发《深化新时代教育评价改革总体方案》

新华社北京10月13日电 近日，中共中央、国务院印发了《深化新时代教育评价改革总体方案》，并发出通知，要求各地区各部门结合实际认真贯彻落实。

《深化新时代教育评价改革总体方案》全文如下。

教育评价事关教育发展方向，有什么样的评价指挥棒，就有什么样的办学导向。为深入贯彻落实习近平总书记关于教育的重要论述和全国教育大会精神，完善立德树人体制机制，扭转不科学的教育评价导向，坚决克服唯分数、唯升学、唯文凭、唯论文、唯帽子的顽瘴痼疾，提高教育治理能力和水平，加快推进教育现代化、建设教育强国、办好人民满意的教育，现制定如下方案。

一、总体要求

（一）指导思想。以习近平新时代中国特色社会主义思想为指导，全面贯彻党的十九大和十九届二中、三中、四中全会精神，全面贯彻党的教育方针，坚持社会主义办学方向，落实立德树人根本任务，遵循教育规律，系统推进教育评价改革，发展素质教育，引导全党全社会树立科学的教育发展观、人才成长观、选人用人观，推动构建服务全民终身学习的教育体系，努力培养担当民族复兴大任的时代新人，培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人。

《深化新时代教育评价改革总体方案》

高校应该严格制定考核标准，学业考核标准要实现过程化考核与结果性考核的有机结合.

坚持科学有效，改进结果评价，强化过程评价，探索增值评价，健全综合评价，充分利用信息技术，提高教育评价的科学性、专业性、客观性。

课堂实录评分表（第三届）

评价维度	评价要点
教学理念	教学理念体现“学生中心”教育理念，体现立德树人思想，符合学科特色与课程要求；以“四新”建设为引领，推动教育教学改革、提高人才培养能力。
教学内容	教学内容有深度、广度，体现高阶性、创新性与挑战度；反映学科前沿，渗透专业思想，使用质量高的教学资源；充分体现“四新”建设的理念和成果。
	教学内容满足行业与社会需求，教学重、难点处理恰当，关注学生已有知识和经验，教学内容具有科学性。
课程思政	落实立德树人根本任务，将价值塑造、知识传授和能力培养融为一体，显性教育与隐性教育相统一，实现“三全育人”。
	结合所授课程特点、思维方法和价值理念，深挖课程思政元素，有机融入课程教学。

教学过程	注重以学生为中心创新教学，体现教师主导、学生主体。
	教学目标科学、准确，符合大纲要求、学科特点与学生实际，体现对知识、能力与思维等方面的要求。
	教学组织有序，教学过程安排合理；创新教学方法与策略，注重教学互动，启发学生思考及问题解决。
	以信息技术创设教学环境，支持教学创新。
	创新考核评价的内容和方式，注重形成性评价与生成性问题的解决和应用。
教学效果	课堂讲授富有吸引力，课堂气氛融洽，学生思维活跃，深度参与课堂。
	学生知识、能力与思维得到发展，实现教学目标的达成。
	形成适合学科特色、学生特点的教学模式，具有较大借鉴和推广价值。
视频质量	教学视频清晰、流畅，能客观、真实反映教师和学生的教学过程常态。

教学创新设计评分表(第三届)

评价维度	评价要点
理念与目标	课程设计体现"以学生发展为中心"的理念，教学目标符合学科特点和学生实际；在各自学科领域推进"四新"建设，带动教学模式创新；体现对知识、能力与思维等方面的要求。教学目标清楚、具体，易于理解，便于实施，行为动词使用正确，阐述规范。
内容分析	教学内容前后知识点关系、地位、作用描述准确，重点、难点分析清楚。
	能够将教学内容与学科研究新进展、实践发展新经验、社会需求新变化相联系。
学情分析	学生认知特点和起点水平表述恰当，学习习惯和能力分析合理。
课程思政	将思想政治教育与专业教育有机融合，引用典型教学案例举例说明，具有示范作用和推广价值。
过程与方法	教学活动丰富多样，能体现各等级水平的知识、技能和情感价值目标。
	能创造性地使用教材，内容充实精要，适合学生水平；结构合理，过渡自然，便于操作；理论联系实际，启发学生思考及问题解决。
	能根据课程特点，用创新的教学策略、方法、技术解决课堂中存在的各种问题和困难；教学重点突出，难点把握准确。
	合理选择与应用信息技术，创设教学环境，关注师生、生生互动，强调自主、合作、探究的学习。
考评与反馈	采用多元评价方法，合理评价学生知识、能力与思维的发展。
	过程性评价与终结性评价相结合，有适合学科、学生特点的评价规则与标准。
文档规范	文字、符号、单位和公式符合标准规范；语言简洁、明了，字体、图表运用适当；文档结构完整，布局合理，格式美观。
设计创新	教学方案的整体设计富有创新性，能体现高校教学理念和要求；教学方法选择适当，教学过程设计有突出的特色。

课程考核评价设计要点

基于学生能力培养的课程考核评价

- 评价目标明确
- 评价内容丰富
- 评价方式多样
- 评价主体多元
- 评价标准具体……

两性一度

高阶性

课程目标坚持知识、能力、素质的有机融合，培养学生解决复杂问题的综合能力和高级思维

创新性

课程内容要反映前沿性和时代性，教学方法体现先进性和互动性，积极引导探究式与个性化学习

挑战度

课程设计增加研究型内容，加大学生学习投入，让学生体验“跳一跳才能够得着”的学习挑战

课程试卷设计要点

课程试卷设计要点

基于学生能力培养的课程试卷设计

- 考核目标明确
- 考核内容有梯度
- 试卷结构合理
- 突出重点和难点
- 可衡量的标准……

课程试卷设计要点

列出考核要点

判定问题：

线性空间、子空间、线性相关性、基等

计算问题：

线性空间的基和维数、向量组的秩与极大线性无关组、

子空间的交的基和维数、子空间的和的基与维数、坐标和过渡矩阵等

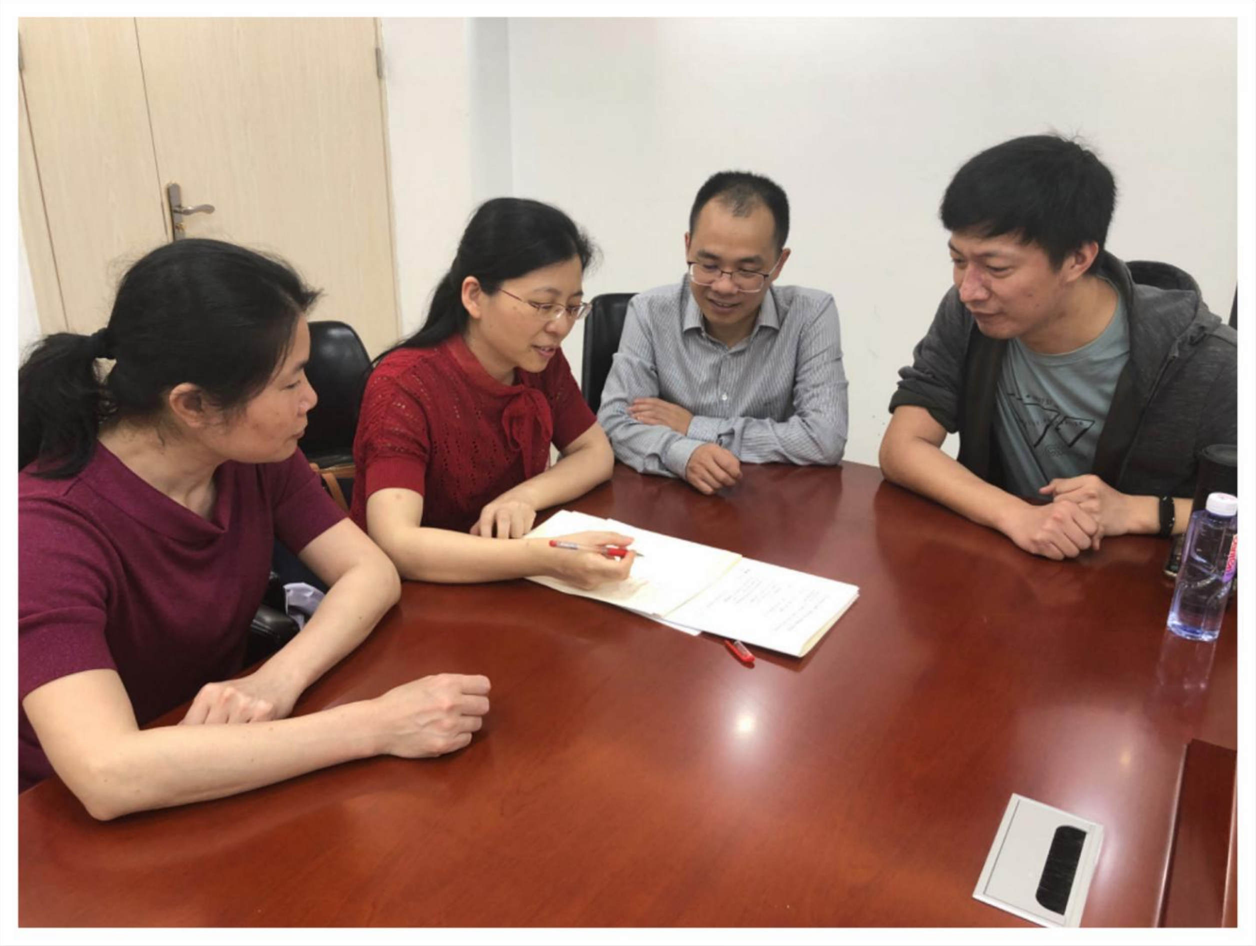
证明问题：

基和维数、子空间、子空间的直和、空间的直和分解等

课程试卷设计要点

试卷除涵盖知识要点外，还应体现代数学主要思想

- 等价分类的思想
- 直和分解的思想
- 同构对应的思想



课程试卷设计要点

题型设计

- 填空题、选择题一般各6题，每题3分

  计算题（1至2题）

  突出对于定义和性质的理解
- 证明题： 3到4道
  - 2至3道涉及重点**代数学思想方法**，难度递增
  - 1道压轴题，需要**综合运用**多种思想及方法
  - 1道附加题，增加**选拔度**

提供厦门大学数学学院《高等代数》课程近五个学年各学期各阶段所有试卷原件。版权所有，转载请注明出处，禁止任何以盈利为目的的转载行为。

22-23学年第二学期《高等代数》期末考试卷	试题	参考答案
22-23学年第二学期《高等代数》单元考试卷	试题	参考答案
22-23学年第一学期《高等代数》期末考试卷	试题	参考答案
22-23学年第一学期《高等代数》半期考试卷	试题	参考答案
21-22学年第二学期《高等代数》期末考试卷	试题	参考答案
21-22学年第二学期《高等代数》第二单元考试卷	试题	参考答案
21-22学年第二学期《高等代数》第一单元考试卷	试题	参考答案
21-22学年第一学期《高等代数》期末考试卷	试题	参考答案
21-22学年第一学期《高等代数》半期考试卷	试题	参考答案
20-21学年第二学期《高等代数》期末考试卷	试题	参考答案

课程试卷设计要点

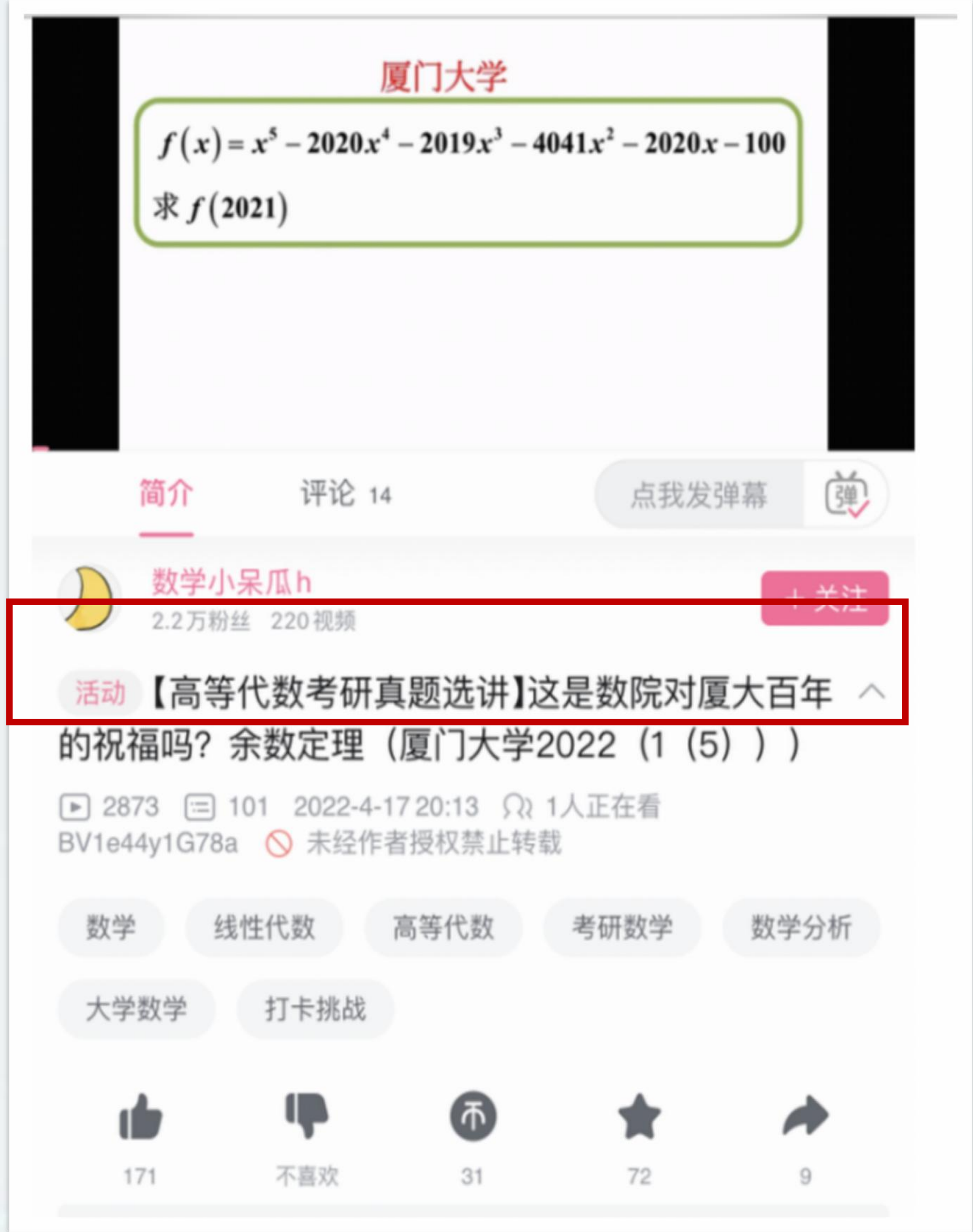
4 . 列向量组$(e,\pi,\mathrm{i},\sqrt{2})^{\mathrm{T}}, (2,7,1,8)^{\mathrm{T}}, (2,0,2,3)^{\mathrm{T}}, (1,9,2,3)^{\mathrm{T}}, (1,2,1,6)^{\mathrm{T}}$ ________(选填 “线性相关”，“线性无关”). 线性相关

5 . 设$\det(\alpha,\beta,\gamma)=\det(\alpha,\beta,\gamma+\delta)=1$, 则列向量组$\alpha,\beta,\delta$的极大无关组是________. α,β

6 . 设U是线性空间V的子空间, φ是V的线性变换, 记$\varphi^{-1}(U)=\{\alpha\in V|\varphi(\alpha)\in U\}$. 则$\varphi(\varphi^{-1}(U))=$____________________. $U\cap\mathrm{Im}\varphi$

课程试卷设计要点

这是对厦大百年的祝福！！



课程试卷设计要点

三、(12分) 在$V=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$中分别定义加法和数乘:

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac),\ k\odot(a,b)=(ka,kb+\frac{1}{2}k(k-1)a^2),$$

则V构成$\mathbb{R}$上的线性空间. 试判断此时V中向量$(1,1)$与$(2,2)$的线性相关性并说明理由.

解 (何奕晗、卢子杰、王与乐、兰景琪等)

首先求出零向量.假设对于任意向量$(a,b)\in V$，

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a,b).$$

根据加法$\oplus$的定义，有

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac).$$

于是，结合上述两等式可得

$$\begin{cases} a=a+c, \\ b=b+d+ac. \end{cases} \Rightarrow c=d=0.$$

即零向量为$(0,0)$.

设存在$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，使得

$$k_1\odot(1,1)\oplus k_2\odot(2,2)=(0,0).$$

根据加法$\oplus$和数乘$\odot$的定义，有

$$\begin{aligned}(k_1,k_1+\frac{1}{2}k_1(k_1-1))\oplus(2k_2,2k_2+2k_2(k_2-1))&=(0,0)\\(k_1+2k_2,k_1+\frac{1}{2}k_1(k_1-1)+2k_2+2k_2(k_2-1)+2k_1k_2)&=(0,0)\\(k_1+2k_2,\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}k_1^2+2k_2^2+2k_1k_2)&=(0,0)\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} k_1+2k_2=0 \\ \frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}k_1^2+2k_2^2+2k_1k_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=-2k_2 \\ -k_2+2k_2^2+2k_2^2-4k_2^2=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=0.$$

也就是说，此时V中的向量$(1,1)$与$(2,2)$线性无关.

课程试卷设计要点

五. (10分) 设$V = V_1 \bigoplus V_2$, α 是V 中非零向量. 设

$$W = \langle\alpha\rangle, W \bigcap V_1 = 0, W \bigcap V_2 = 0.$$

令$S = (V_1 + W)\bigcap(V_2 + W)$.

1 .求S 的维数, 要求简要说明理由;

2 .给出S 的一个基, 并给予证明.

(2) (法一) (2015级周仕钧, 2014级刘俣伽) 设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 和$\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \cdots, \xi_n$ 分别是V_1和V_2 的一个基, 由$V = V_1 \bigoplus V_2$ 知, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_r, ξ_{r+1}, ξ_{r+2}, $\cdots$, ξ_n是V的一个基. 因此存在唯一$a_i \in F$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 使得$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i$. 往证$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i$, $\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i$是S的一个基. 事实上, 首先$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i$, $\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i$均非零. 若不然, 设$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i = 0$, 则$0 \neq \alpha = \sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i \in W \bigcap V_2 = 0$, 矛盾, 故$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i$非零; 同理$\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i$非零. 其次, $\sum_{i=1}^r a_i\xi_i$, $\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i \in S$. 这是因为$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i = -\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i + \alpha \in (V_1 + W)\bigcap(V_2 + W) = S$, 同理$\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i \in S$. 最后, $\sum_{i=1}^r a_i\xi_i$, $\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i$线性无关. 若不然, 存在不全为0的k, l, 不妨设$k \neq 0$, 使得$k\sum_{i=1}^r a_i\xi_i + l\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i = 0$, 则$0 \neq k\sum_{i=1}^r a_i\xi_i = -l\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i \in V_1 \bigcap V_2 = 0$, 矛盾. 结合$\dim S = 2$, 即得$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i$, $\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i$是S的一个基.

(法二) (2015级贺李鑫) 同法一证明可得$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i, \sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i \in S$, $a_1, \cdots, a_r$不全为零且$a_{r+1}, \cdots, a_n$不全为零. 现证$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i, \sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i \in S$线性无关. 设$b_1\sum_{i=1}^r a_i\xi_i + b_2\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i = 0$, 整理得$b_1a_1\xi_1 + \cdots + b_1a_r\xi_r + b_2a_{r+1}\xi_{r+1} + \cdots + b_2a_n\xi_n = 0$. 因$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$线性无关, 所以$b_1a_1 = \cdots = b_1a_r = b_2a_{r+1} = \cdots = b_2a_n = 0$, 但$a_1, \cdots, a_r$ 不全为零且$a_{r+1}, \cdots, a_n$ 不全为零, 所以$b_1 = b_2 = 0$, 所以$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i, \sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i \in S$ 线性无关. 又因为$\dim S = 2$, 因此$\sum_{i=1}^r a_i\xi_i, \sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i$是$S$ 的一个基.

$\alpha - a_1\xi_1 - a_2\xi_2 - \cdots - a_r\xi_r = a_{r+1}\xi_{r+1} + a_{r+2}\xi_{r+2} + \cdots + a_n\xi_n \in (V_1 + W)\bigcap(V_2 + W)$, 其次, 若$b\alpha + c(a_{r+1}\xi_{r+1} + a_{r+2}\xi_{r+2} + \cdots + a_n\xi_n) = 0$, 得$ba_1\xi_1 + \cdots + ba_{i_1}\xi_{i_1} + \cdots + ba_r\xi_r + (b+c)a_{r+1}\xi_{r+1} + \cdots + (b+c)a_{i_2}\xi_{i_2} + \cdots + (b+c)a_n\xi_n = 0$, 注意到$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \cdots, \xi_n$是$V$的一个基, 故$ba_{i_1} = 0$, $(b+c)a_{i_2} = 0$, 结合$a_{i_1} \neq 0$, $a_{i_2} \neq 0$, 即得$b, c = 0$. 故$\alpha, a_{r+1}\xi_{r+1} + a_{r+2}\xi_{r+2} + \cdots + a_n\xi_n$线性无关. 又$\dim S = 2$, 所以$\alpha, a_{r+1}\xi_{r+1} + a_{r+2}\xi_{r+2} + \cdots + a_n\xi_n$是$S$的一个基.

(法七) (2015级莫苏芮, 王兆楠) 由$V = V_1 \bigoplus V_2$ 知, 对$\alpha \in V$, 存在唯一$a_i \in V_i$, $i = 1, 2$, 使得$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. 可以断言$\alpha$, α_1是S的一个基. 首先, 由$\alpha_1 = -\alpha_2 + \alpha$, 知$\alpha$, $\alpha_1 \in (V_1 + W)\bigcap(V_2 + w) = S$. 其次, α, α_1线性无关. 若$a\alpha + b\alpha_1 = 0$, 则$(a+b)\alpha_1 + a\alpha_2 = 0$. 因$V_1 \bigoplus V_2$, 故$(a+b)\alpha_1 = a\alpha_2 = 0$. 若$\alpha_2 = 0$, 则$\alpha = \alpha_1 \in W \bigcap V_1 = 0$, 与$\alpha \neq 0$矛盾, 故$\alpha_2 \neq 0$. 因此$a = 0$. 同理$\alpha_1 \neq 0$, 进而$a + b = 0$, $b = 0$. 最后, 对任意$\beta \in S$, 因$S = (V_1 + W)\bigcap(V_2 + W)$, $V_1 \bigcap W = V_2 \bigcap W = 0$, 故存在唯一$\beta_1 \in V_1$, $\beta_2 \in V_2$, $a_1, a_2 \in F$, 使得$\beta = \beta_1 + a_1\alpha = \beta_2 + a_2\alpha$, 则$\beta_1 - \beta_2 = (a_2 - a_1)\alpha = (a_2 - a_1)\alpha_1 + (a_2 - a_1)\alpha_2$. 因$V = V_1 \bigoplus V_2$, 知分解唯一, 故$\beta_1 = (b-a)\alpha_1$, 所以$\beta = (a_2 - a_1)\alpha_1 + \alpha$. 这就证明了$\alpha$, α_1是S的一个基.

(法八) (2015级胡爽) 对$\alpha \in V$, 又$V = V_1 \bigoplus V_2$, 则$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中$\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$. 如$\alpha_1 = 0$, 则$\alpha = \alpha_2 \in W \bigcap V_2 = 0$, 与$\alpha$ 非零矛盾, 同理α_2 非零. 则α, $\alpha_1 - \alpha_2$ 是S 的一个基. $\alpha \in S$显然. $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_1) = 2\alpha_1 - \alpha \in V_1 + W$, 且$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_2 = \alpha - 2\alpha_2 \in V_2 + W$, 所以$\alpha_1 - \alpha_2 \in (V_1 + W)\bigcap(V_2 + W) = S$. 若$k_1\alpha + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, $(k_1 + k_2)\beta + (k_1 - k_2)\alpha_2 = 0$. 因为$V = V_1 \bigoplus V_2$, 则$(k_1 + k_2)\alpha_1 = (k_1 - k_2)\alpha_2 = 0$, 而$\alpha_1$, α_2 非零, 所以$k_1 + k_2 = k_1 - k_2 = 0$, 得$k_1 = k_2 = 0$, 所以$\alpha$, $\alpha_1 - \alpha_2$ 线性无关. 又S 维数为2, 则α, $\alpha_1 - \alpha_2$ 是S 的一个基.

(法九) (2014级刘鹏) 由已知条件及维数公式, 可得$\dim((V_1 + W)\bigcap V_2) = \dim(V_1 + W) + \dim V_2 - \dim(V_1 + W + V_2) = 1$. 故可设$(V_1 + W)\bigcap V_2 = \langle\gamma\rangle$, 显然$\gamma \neq 0$, 可证$\alpha, \gamma$是$S$的一个基. 事实上, $\alpha = 0 + \alpha \in (V_1 + W)\bigcap(V_2 + W) = S$, $\gamma \in (V_1 + W)\bigcap V_2 \subseteq (V_1 + W)\bigcap(V_2 + W) = S$, 且$\gamma \in V_2$. 若$t_1\alpha + t_2\gamma = 0$, 因$W \bigcap V_2 = 0$, 所以$t_1\alpha = t_2\gamma = 0$, 而$\alpha, \gamma$均非零, 所以$t_1 = t_2 = 0$, 即$\alpha, \gamma$线性无关. 又$\dim S = 2$, 因此$\alpha, \gamma$是$S$的一个基.

课程试卷设计要点

六、(12分) 设A是n阶方阵. 证明: $A^2=A$的充分必要条件是存在$n\times r$矩阵S 和$r\times n$矩阵T, 使得$A=ST, TS=E_r$且$r(S)=r(T)=r$.

证明 必要性 对A, 设$r(A)=r$, 则存在可逆矩阵P, Q, 使得$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$. 将$P,Q$分块为$P=(P_1,P_2)$, $Q=\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}$. 其中$P_1$和$Q_1$分别是$n\times r$和$r\times n$矩阵, 且由$P,Q$可逆知$r(P_1)=r(Q_1)=r$. 直接计算有

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=(P_1,P_2)\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}=(P_1,0)\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}=P_1Q_1.$$

又因为$A^2=A$, P, Q 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}(P_1,P_2)\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}Q_1\\ 0\end{pmatrix}(P_1,0)=\begin{pmatrix}Q_1P_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

所以$Q_1P_1=E_r$. 因此, 令$S=P_1$, $T=Q_1$即可.

充分性 直接计算有$A^2=STST=SE_rT=ST=A$.

课程试卷设计要点

四. (12 分) 设非零多项式 $f(x), g(x) \in F[x]$, n 是大于 1 的正整数. 请给出

$$(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$$

的充分必要条件, 并证明.

答 1 $(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$ 充分必要条件是对 $f(x), g(x)$ 的任意不可约公因式 $p(x)$, $f(x)$ 中 $p(x)$ 重因式的次数大于等于 $g(x)$ 中 $p(x)$ 重因式的次数, 即若 $p(x)$ 是 $g(x)$ 的 $k(\geq 1)$ 重因式, 则 $p(x)$ 是 $g(x)$ 的 $l(\geq k)$ 重因式.

证明 (法一) (14 级陈瑞捷, 刘宇靖, 宋逸伦, 邱思泳, 韦馨雷等) 设 $f(x) = cp_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_s^{a_s}(x)$, $g(x) = dp_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_s^{b_s}(x)$, 其中 $p_i(x)$ 是两两互素首一不可约多项式, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_i+b_i > 0, 1 \leq i \leq s$. 则 $(f(x), g(x)) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x)\cdots p_s^{c_s}(x)$, 其中 $c_i = \min\{a_i, b_i\}$. 进而对 $n > 1$, $f^n(x) = cp_1^{na_1}(x)p_2^{na_2}(x)\cdots p_s^{na_s}(x)$, $(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$ 的充分必要条件是 $\min\{a_i, b_i\} = \min\{na_i, b_i\}$.

必要性 反证法. 若不然, $b_i \neq 0$ 时, $a_i < b_i$, 则 $\min\{a_i, b_i\} = a_i < \min\{na_i, b_i\}$, 矛盾.

充分性 (1) 当 $b_i = 0$ 时, 即 $p_i(x)$ 不是 $g(x)$ 的因式时, 总有 $\min\{a_i, b_i\} = 0 = \min\{na_i, b_i\}$; (2) 当 $b_i \neq 0$ 时, 由已知 $p_i(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式, 且 $a_i \geq b_i$, 则 $\min\{a_i, b_i\} = b_i = \min\{na_i, b_i\}$.

(法二) (14 级段佐林, 付泽, 李帆, 唐诗媛, 郑少钦等) 设 $f(x) = ap_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_r(x)^{a_r}f_1(x)$, $g(x) = bp_1^{b_1}(x)p_2^{b_2(x)}\cdots b_r^{a_r}(x)g_1(x)$, 其中 $p_i(x), f_1(x), g_1(x) \in F[x]$, $p_i(x)$ 两两互素首一不可约多项式, $(p_i(x), f_1(x)) = (p_i(x), g_1(x)) = 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{>0}, 1 \leq i \leq r, r \geq 0$. $(f(x), g(x)) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x)\cdots p_s^{c_s}(x)$, 其中 $c_i = \min\{a_i, b_i\}$, $1 \leq i \leq r$. 类似法一证明即得 $(f(x), g(x)) = (f^n(x), g(x))$ 的充分必要条件是 $a_i \geq b_i$, $1 \leq i \leq r$.

答 2 $(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$ 充分必要条件是 $(\frac{g(x)}{d(x)}, d(x)) = 1$, 其中 $d(x) = (f(x), g(x))$.

证明 (法三) (14 级石鹏飞, 姜友捷, 胡泽林, 姜伯汉, 陈亚雯, 王心彦等) 设 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 0$, $f(x) = d(x)f_1(x)$, $g(x) = d(x)g_1(x)$, 则 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$, 进而 $(f_1^n(x), g_1(x)) = 1$. 因 $f(x), g(x)$ 非零, 故 $d(x) \neq 0$.

必要性 因 $(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$, 所以 $(f_1^n(x)d^{n-1}(x), g_1(x)) = 1$. 故 $(g_1(x), d(x)) = 1$, 此即 $(\frac{g(x)}{d(x)}, d(x)) = 1$.

充分性 因 $(\frac{g(x)}{d(x)}, d(x)) = 1$, 即 $(g_1(x), d(x)) = 1$, 故 $(d^{n-1}(x), g_1(x)) = 1$. 因此 $(f^n(x), g(x)) = (f_1^n(x)d^n(x), g_1(x)d(x)) = d(x)(f_1^n(x)d^{n-1}(x), g_1(x)) = d(x)(f_1^{n-1}(x), g_1(x)) = d(x)$ (这里利用了 $(f_1(x), g_1(x)) = 1)$

答 4 $(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$ 充分必要条件是若 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根, 则每个公共复根在 $f(x)$ 的重数均大于等于在 $g(x)$ 的重数.

证明 (法六) (14 级何行实, 李夕瑶, 卢齐洁)

必要性 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则 $(f^n(x), g(x)) = 1$. 若 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$, 则设 $d(x) = (x-c_1)^{a_1}(x-c_2)^{a_2}\cdots(x-c_m)^{a_m}$, 其中 c_i 两两互异, $a_i > 0, 1 \leq i \leq m$. 若 c_i 是 $f(x)$ 的 k_i 重根, 是 $g(x)$ 的 l_i 重根, 则 $a_i = \min\{k_i, l_i\}$. 因此 c_i 是 $f^n(x)$ 的 nk 重根, $a_i = \min\{k_i, l_i\} = \min\{nk_i, l_i\}$, 所以 $k_i \geq l_i$, 即 c_i 在 $f(x)$ 的重数大于等于在 $g(x)$ 的重数.

充分性 设 $d(x) = (x-c_1)^{a_1}(x-c_2)^{a_2}\cdots(x-c_m)^{a_m}$, $a_i > 0$, $1 \leq i \leq m$. 若 c_i 是 $f(x)$ 的 k_i 重根, 是 $g(x)$ 的 l_i 重根, 且 $k_i \geq l_i$, 则 $a_i = \min\{k_i, l_i\} = l_i$, $1 \leq i \leq m$. 设 $(f^n(x), g(x)) = d'(x)$, $d'(x) = (x-c_1)^{b_1}(x-c_2)^{b_2}\cdots(x-c_m)^{b_m}$, $b_i > 0$, 则 $b_i = \min\{nk_i, l_i\} = l_i$, $1 \leq i \leq m$. 因此 $d(x) = d'(x)$.

答 4 $(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$ 充分必要条件是若 $g(x)$ 的标准分解式为 $bp_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_s^{b_s}(x)$, 则 $(f(x), g(x)) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x)\cdots p_s^{c_s}(x)$, 其中 $c_i = 0$ 或 $c_i = b_i$, $1 \leq i \leq s$.

证明 (法七) (14 级徐景鑫)

必要性 同法一 (略)

充分性 设 $(f^n(x), g(x)) = p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_s^{a_s}(x)$. 若 $b_i = 0$, 则由 $c_i = 0$ 或 $c_i = b_i = 0$, 得 $p_1(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式. 又 $p_i(x)$ 不可约, 故 $p_i(x)$ 不是 $f^n(x)$ 的因式, 从而 $a_i = 0 = b_i$. 若 $c_i = b_i$, 则 $p_i^{c_i}(x)|f(x)$, 即 $p_i^{b_i}(x)|f(x)$, 故 $p_i^{b_i}(x)|f^n(x)$. 结合 $g(x)$ 的假设, 得 $a_i = b_i$. 综上, $(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$.

答 5 $(f^n(x), g(x)) = (f(x), g(x))$ 充分必要条件是 $(f^2(x), g(x)) = (f(x), g(x))$.

证明 (法八) (14 级蔡德滨) 记 $(f(x), g(x)) = d_1(x)$, $(f^k(x), g(x)) = d_k(x)$.

必要性 一方面, $d_2(x)|f^n(x)$, $d_2(x)|g(x)$, 所以 $d_2(x)|d_n(x)$, 又由已知 $d_1(x) = d_n(x)$, 故 $d_2(x)|d_1(x)$. 另一方面, $d_1(x)|f^2(x)$, $d_1(x)|g(x)$, 所以 $d_1(x)|d_2(x)$, 结合首一, 有 $d_1(x) = d_2(x)$.

充分性 反证法. 若不然, $(f^n(x), g(x)) \neq (f(x), g(x))$, 即 $d_n(x) \neq d_1(x)$. 因 $f(x)|f^n(x)$, 所以 $d_1(x)|d_n(x)$, 存在不可约多项式 $r(x)$, 使得 $d_1(x)r(x)|d_n(x)$. 故 $d_1(x)r(x)|g(x)$, 且存在 $u(x)$, $v(x)$, 使得 $f(x) = d_1(x)u(x)$, $f^n(x) = f^{n-1}(x)d_1(x)u(x)$, $f^n(x) = d_1(x)r(x)v(x)$, 所以 $r(x)v(x) = f^{n-1}(x)u(x)$, 因此 $r(x)|f^{n-1}(x)$ 或

课程试卷设计要点

六、(10分) (1) 证明: 任一n阶方阵必可经行初等变换化为对称矩阵;

(2) 任一方阵是否可经行初等变换化为反称矩阵? 若可, 请给出证明; 若不可, 请举反例.

(2) 未必任一方阵均可经行初等变换化为反称矩阵.

(例1) (昂正大, 林鹭楠, 仇垚鑫, 杨琳, 赵一卓, 郑绍楷 等)

$A=1$无法经可逆初等变换化为反称矩阵.

(例2) (车雨赫, 林长盛, 王昱祺 等)

因为若A是n阶反称矩阵, 则$\det A^{\mathrm{T}}=\det(-A)=(-1)^n\det A=-\det A$, 因此$\det A=0$. 所以任意奇数阶可逆矩阵必不可经行初等变换化为反称矩阵.

(例3) (郑雨晨)

$A=E_3$无法经可逆初等变换化为反称矩阵. 因为$\det A=1$, 但3阶反称矩阵的行列式为0.

(例4) (王泽峰, 徐思源)

$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$无法经可逆初等变换化为反称矩阵. 因为$A$经行初等变换只能变为$B=\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}$, 其中$a,b$至少有一个非零. 但$B$显然不是反称矩阵.

(例5) (李若凡, 柯鸿霖, 龙俊羽, 杨沛轩 等)

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. 设可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 其中$ad-bc\neq 0$. 则$PA=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}$. 因为$ad\neq bc$, 所以$a,c$不能同时为0.

若a,c均不为0, 显然PA不是反称矩阵. 若$a=0$, 则$c\neq 0$, 则$PA=\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}$不是反称矩阵.

若$c=0$, 则$a\neq 0$, 则$PA=\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}$也不是反称矩阵.

故A不可经行初等变换化为反称矩阵.

(例6) (吴方予, 胡博钦 等)

$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$或$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$. $r(A)=1$. 若存在可逆矩阵P, 使得$PA=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$, 其秩为0或2, 矛盾.

(例7) (王江林)

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. $r(A)=1$. 但3阶反称矩阵形如$PA=\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$, 其秩为0或2, 矛盾.

课程试卷设计要点

附加题 (10分) 设线性空间$V=U\bigoplus W$, 其中$\dim U=k$. 对于U到W的线性映射φ, 定义

$$\Gamma_\varphi=\{u+\varphi(u)|u\in U\}.$$

设S是V的k维子空间. 证明: 存在U到W的线性映射φ使得$S=\Gamma_\varphi$的充分必要条件是$S\bigcap W=0$.

证明 (李昂蔚, 刘琰, 岳一凡)

必要性 对任意$\alpha\in S\bigcap W$, 存在$u\in U$, 使得$\alpha=u+\varphi(u)=w$. 因为φ是U到W的线性映射, 所以$\varphi(u)\in W$, 进而$u=w-\varphi(u)\in U\bigcap W$. 注意到$V=U\bigoplus W$, 所以$u=0$, 从而$\alpha=0$.

充分性 因为$\dim S=k$且$S\bigcap W=0$, 而$V=U\bigoplus W$, 其中$\dim U=k$, 则$V=S\bigoplus W$. 对U的任意基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$, 存在唯一的$s_i\in S$与$w_i\in W$, 使得$\xi_i=s_i+w_i$, 即$s_i-\xi_i\in W$. 令$\varphi:U\to W$, $\xi_i\mapsto s_i-\xi_i$, 可见$s_i=\xi_i+\varphi(\xi_i)$, $i=1,2,\cdots,k$. 往证$s_1,s_2,\cdots,s_k$构成S的一个基, 从而对任意的$s\in S$, $s=u+\varphi(u)$, 命题得证.

事实上, 若$a_1s_1+a_2s_2+\cdots+a_ks_k=0$, 则$a_1(\xi_1-w_1)+a_2(\xi_2-w_2)+\cdots+a_k(\xi_k-w_k)=0$, 所以$a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_k\xi_k=a_1w_1+a_2w_2+\cdots+a_kw_k\in U\bigcap W$, 因此$a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_k\xi_k=0$, 而$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$线性无关, 因此$a_1=a_2=\cdots=a_k=0$.

过程性考核评价要点

过程性考核评价设计要点

过程性考核评价设计要点

- 评价与指导相结合
- 定量与定性相结合
- 激励与反馈并重
- 个体与整体兼顾
- 反思与总结持续……

厦门大学高等代数教学团队

国家级精品课程
http://gdjpkc.xmu.edu.cn

国家级资源共享课
http://www.icourses.cn/sCourse/course_3077.html

国家级一流本科课程
http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004
http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

MOOC《高等代数习题课》
https://www.icourse163.org/course/XMU-1462086163

过程性评价——线上数据

慕课小测

第1周测验 查看帮助

1 填空 (2分) 最小的数域是____?

请输入答案

2 判断 (2分) 实数域和复数域之间不存在其他数域。

A. ✓

B. ✗

3 填空 (2分) $\sum_{1\le i<j\le 3}(j-i)=$______

请输入答案

4 单选 (2分) $\sum_{1\le i\le j\le 3} a_{ij}=$______

A. $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{31}+a_{32}+a_{33}$

B. $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{22}+a_{23}+a_{33}$

C. $a_{12}+a_{13}+a_{23}$

D. $a_{11}+a_{22}+a_{33}$

5 单选 (2分) A是$t\times k$矩阵,B是$k\times t$矩阵,若B的第j列元素全为零,则下列结论正确的是____。

A. AB的第j行元素全等于零

B. AB的第j列元素全等于零

C. BA的第j行元素全等于零

D. BA的第j列元素全等于零

测验 作业 考试 课堂讨论

学生信息	测验/260分	作业/660分	考试/100分	课堂讨论 (回复/被赞)
[illegible]	9.69	2.91	82.32	11/0
[illegible]	10	2.81	83.16	0/0
[illegible]	9.23	1.45	81.48	7/0
[illegible]	9.85	1.31	84	0/0
[illegible]	9.85	2.81	82.32	0/0
[illegible]	9.92	2.78	78.96	6/0
[illegible]	9.69	2.54	81.48	0/0
[illegible]	9.23	2.18	78.96	15/1
[illegible]	9.62	2.86	77.28	5/0

过程性评价——慕课堂

正确率：100.0%　　平均分：2　　总分：2

1. 填空 (2分)

设n阶方阵*A*的第一行元素全为零，则对任意n阶方阵*B*，*AB*的第一____（选填"行"，"列"）元素全为零。

正确率：83.3%　　平均分：1.7　　总分：2

2. 判断 (2分)

对角矩阵与任意矩阵乘积可交换。

正确率：66.7%　　平均分：1.5　　总分：2

3. 多选 (2分)

设*A*,*B*,*C*为*n*阶方阵, 则以下结论**错误**的是____.

正确率：50.0%　　平均分：1　　总分：2

4. 判断 (2分)

对称矩阵的乘积仍然是对称矩阵.

5-1 一元多项式和运算

练习说明（选填）

1. 判断题 (2分)若f(x), g(x)是数域F上的多项式，满足

$$f^2(x)+g^2(x)=0。$$

问是否必有f(x)=g(x)=0

2. 填空题 (2分)设多项式f(x)是5次多项式，则f(f(x))的次数是_____。

3. 单选题 (2分)设5次多项式f(x)的首项系数是2，则f(f(x))的首相系数是_____。

A. 2
B. 4
C. 32
D. 64

4. 判断题 (2分)若f(x), g(x)均非零多项式，则f(x)g(x)必是非零多项式。

5. 单选题 (2分)若f(x), g(x)都是非零一元多项式，且次数分别为m次和n次。则_____。

A. f(g(x))=g(f(x))
B. deg(f(g(x)))=deg(g(f(x))), 但f(g(x))首项≠g(f(x))首项
C. deg(f(g(x)))≠deg(g(f(x))), 但f(g(x))首项≠g(f(x))首项
D. deg(f(g(x)))≠deg(g(f(x))), 但f(g(x))首项≠g(f(x))首项

总分：10分

5-2 整除

练习说明（选填）

1. 判断题 (2分)在F[x]中，2|3吗

2. 判断题 (2分)在F[x]中，是否对任意f(x)，总有f(x)|0

3. 判断题 (2分)若0|f(x)，是否必有f(x)=0

4. 判断题 (2分)设f(x), g(x)都是有理系数多项式，若在C[x]上，f(x)|g(x)，则在Q[x]上也有f(x)|g(x)。

5. 判断题 (2分)设f(x), g(x)是F[x]上多项式，g(x)≠0。将f(x), g(x)可视为C[x]上多项式，有带余除法: f(x)=g(x)q(x)+r(x)，其中deg(r(x))<deg(g(x))。则q(x), r(x)必是F[x]上多项式。

练习库　练习库会保存您在备课过程中创建的练习，以便您在多课堂之间重复使用。

创建练习

6-3 极小多项式

6-2 可对角化

6-1 特征值和特征向量

线性映射知识回顾

线性空间知识回顾

矩阵与线性方程组回顾

第5章慕课堂小测

5-9 对称多项式-2 5-3 中国剩余定理

5-9 对称多项式

4. 判断题 (2分)若f(x), g(x)均非零多项式，则f(x)g(x)必是非零多项式。

5. 单选题 (2分)若f(x), g(x)都是非零一元多项式，且次数分别为m次和n次。则_____。

A. f(g(x))=g(f(x))
B. deg(f(g(x)))=deg(g(f(x))), 但f(g(x))首项≠g(f(x))首项
C. deg(f(g(x)))≠deg(g(f(x))), 但f(g(x))首项≠g(f(x))首项
D. deg(f(g(x)))≠deg(g(f(x))), 但f(g(x))首项≠g(f(x))首项

过程性评价——慕课堂

慕课堂

中国联通 上午9:28 99%

9-2 规范形

正确率：25.0%

2/5 判断题（2分）

设n阶实对称矩阵A可逆，则A与A^{-1}合同，A也与A^{*}合同。

- 正确 21次 75%
- 错误 7次 25%

正确答案：错误

题目解析

A与A^{-1}合同，且在detA大于0时，或者A，B正负特征值一样多时，A与A*合同。

内容榜单

正确率最低的练习题目TOP3

复数域上两个n阶矩阵合同的充分必要条件是们的秩相等。

正确率：14% 查看详情>

设欧氏空间V的线性变换φ的极小多项式为λ(λ-1)，若$U=V_0$，则$U^{\perp}=V_1$。其中V_0, V_1分别是φ属于0和1特征值的特征值子空间

正确率：14% 查看详情>

设$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则以下说法正确的是___.

正确率：14% 查看详情>

答题榜

课堂累计发布了201题

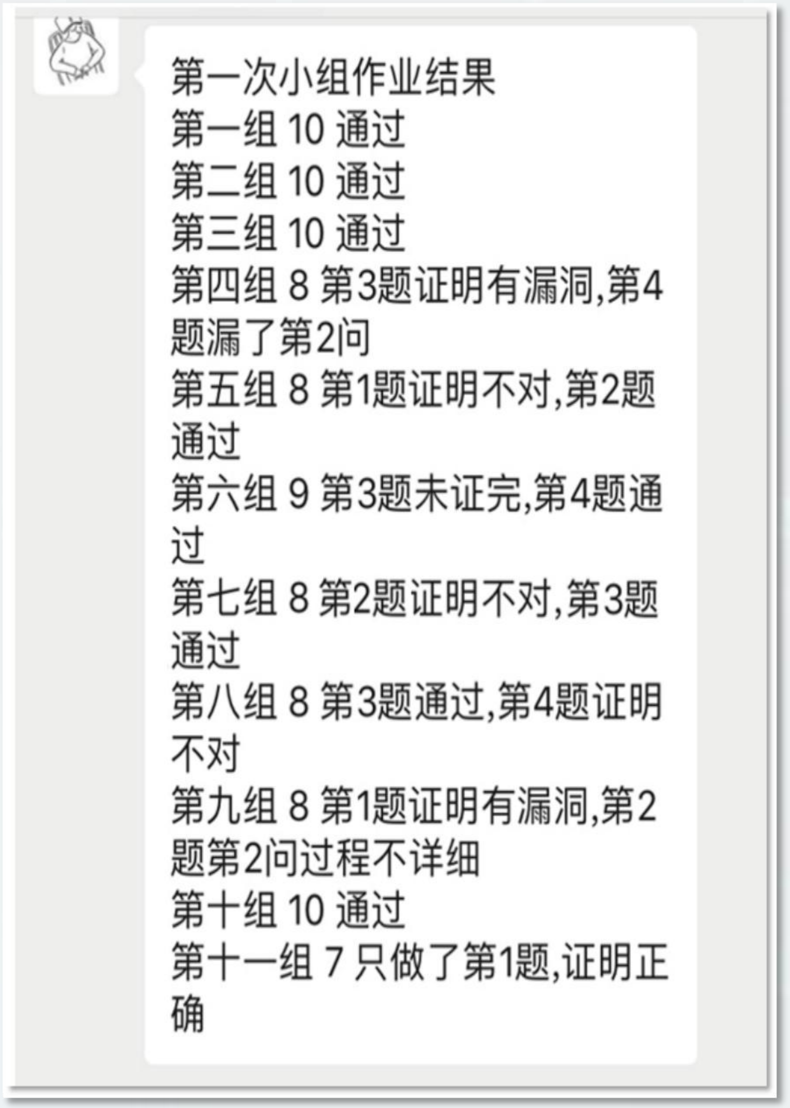
红榜 黑榜

- 李 正确率85% 答对170题
- 段 正确率84% 答对168题
- 孔 正确率82% 答对165题
- 杨 正确率82% 答对165题
- 陈 正确率80% 答对161题

查看全部>

过程性考核评价

拓展学习形式，结合小组讨论，提升学习挑战度，促进学生自主学习、探索学习



小组作业

挑战题

- **挑战题** **求次数最低多项式** $f(x)$, **使得** $f(A)=B$,

  其中 $A=\mathrm{diag}(A_1, A_2)$, $B=\mathrm{diag}(B_1, B_2)$,

  $$A_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, B_1=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-1\end{pmatrix}.$$

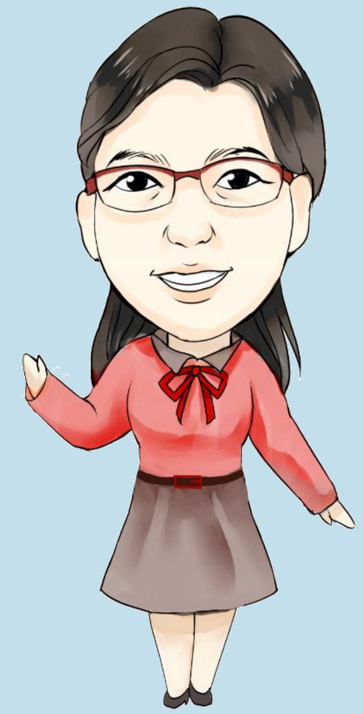
- **提示：注意到**

  $$A_1^2=O, (A_2-E)^2=O, A_1+2E=B_1, 2A_2-3E=B_2,$$

  问题转化为求 $f(x)$, **使得**

  $$f(x)\equiv(x+2)(\mathrm{mod}\ x^2),$$

  $$f(x)\equiv(2x-3)(\mathrm{mod}\ (x-1)^2).$$



谢谢大家！